

Distribution uniforme de certaines suites d'entiers aléatoires dans le groupe de Bohr

Jean-Pierre Kahane et Yitzhak Katznelson

Nous reprenons et complétons ici l'un des résultats de l'article qui précède [1], dont nous utilisons les notations :

$\{\xi_n\}$, $n = 1, 2, \dots$, est une suite de variables aléatoires de Poisson indépendantes, de paramètres w_n ,

$$\beta_n = 0 \text{ si } \xi_n = 0, \quad \beta_n = 1 \text{ si } \xi_n > 0,$$

$$\Lambda = \Lambda(\omega) = \{n \in \{1, 2, \dots\} : \xi_n > 0\} = \{n \in \{1, 2, \dots\} : \beta_n = 1\},$$

\mathbb{B} est le groupe de Bohr, dual de $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ discret, dans lequel \mathbb{Z} est dense.

Dans [1] se trouve établi le résultat suivant :

Théorème A. *Si $\lim_{n \rightarrow \infty} (nw_n) = \infty$, Λ est p.s. dense dans \mathbb{B} .*

Lors d'une conférence où ce résultat était mentionné, H. Niederreiter, [2], a posé une question naturelle et pertinente : est-il vrai que Λ est p.s. uniformément distribuée sur \mathbb{B} ?

La réponse est négative en général (exemple typique : $w_n = 1$ quand n est impair, $w_n = 2$ quand n est pair), mais elle est positive moyennant une certaine régularité des w_n , et elle fournit à partir de là une démonstration simple et rapide du Théorème A.

Théorème B. *Si $\lim_{n \rightarrow \infty} nw_n = \infty$ et $w_n = \frac{b(n)}{n}$, où $b(u)$ est une fonction à variation lente, Λ est p.s. uniformément distribuée sur \mathbb{B} .*

Avant de préciser le sens des termes, indiquons pourquoi le Théorème A découle du Théorème B. Si $\{w_n\}$ vérifie l'hypothèse du Théorème A, on peut écrire $w_n = w'_n + w''_n$, ou $\{w'_n\}$ vérifie l'hypothèse du Théorème B, et $w''_n > 0$. On sait alors (voir [1]) que $\Lambda(\omega)$ est la réunion de deux suites indépendantes $\Lambda'(\omega)$ et $\Lambda''(\omega)$ associées respectivement à $\{w'_n\}$ et $\{w''_n\}$. Comme, d'après le Théorème B, $\Lambda'(\omega)$ est p.s. dense dans \mathbb{B} , il en est de même pour $\Lambda(\omega)$.

Expliquons le sens des termes, et l'usage que nous en ferons.

On dit que la fonction réelle de variable réelle $b(u)$ est à *variation lente* (slowly varying) si, pour tout $\delta > 0$, $b(u)u^\delta$ est croissante et $b(u)u^{-\delta}$ décroissante quand u est assez grand ([3], p. 186).

Lemme. *Dans l'hypothèse du théorème B, on a pour tout $t \in \mathbb{T}$, $t \neq 0$,*

$$(1) \quad \sup_N \left| \sum_{n=1}^N w_n e^{2\pi i n t} \right| < \infty.$$

Le lemme résulte du fait que la série $\sum_{n=1}^{\infty} w_n e^{2\pi i n t}$ représente une fonction continue, localement à variation bornée, sur $\mathbb{T} \setminus \{0\}$; une évaluation très précise de cette fonction se trouve dans [3], chapitre V, formules (2.13) et (2.16); nous n'en aurons pas besoin ici.

On dit qu'une suite croissante d'entiers λ_j est uniformément distribuée sur \mathbb{B} si les mesures de probabilité $\frac{1}{J} \sum_{j=1}^J \delta_{\lambda_j}$ sur \mathbb{B} convergent faiblement vers la mesure de Haar de \mathbb{B} . Pour cela il est nécessaire et suffisant que, pour tout $t \in \mathbb{T}$, $t \neq 0$, on ait (critère de Weyl)

$$(2) \quad \sum_{j=1}^J e^{2\pi i \lambda_j t} = o(J) \quad (J \rightarrow \infty).$$

Pour la suite aléatoire $\Lambda(\omega)$, la distribution uniforme presque sûre sur \mathbb{B} s'exprime à partir de (2) sous la forme

$$(3) \quad \text{p.s.} \quad \forall t \in \mathbb{T}, t \neq 0 \quad \sum_{n=1}^N \beta_n e^{2\pi i n t} = o\left(\sum_{n=1}^N \beta_n\right), \quad (N \rightarrow \infty)$$

ou aussi bien

$$(4) \quad \text{p.s.} \quad \forall t \in \mathbb{T}, t \neq 0 \quad \sum_{n=1}^N \xi_n e^{2\pi i n t} = o\left(\sum_{n=1}^N \xi_n\right), \quad (N \rightarrow \infty)$$

et finalement

$$(5) \quad \text{p.s.} \quad \forall t \in \mathbb{T}, t \neq 0 \quad \sum_{n=1}^N \xi_n e^{2\pi i n t} = o\left(\sum_{n \leq N} w_n\right), \quad (N \rightarrow \infty).$$

Compte tenu de (1), la preuve du théorème B consistera à établir

$$(6) \quad \text{p.s.} \quad \forall t \in \mathbb{T}, t \neq 0 \quad \sum_{n=1}^N (\xi_n - w_n) e^{2\pi i n t} = o\left(\sum_{n \leq N} w_n\right), \quad (N \rightarrow \infty).$$

En fait nous démontrerons que (6) a lieu même pour $t = 0$.

Preuve de (6). Posons

$$\begin{aligned} X(t) = X_N(t) &= \sum_{1 \leq n \leq N} (\xi_n - w_n) \cos 2\pi n t \\ Y(t) = Y_N(t) &= \sum_{1 \leq n \leq N} (\xi_n - w_n) \sin 2\pi n t. \end{aligned}$$

Pour tout $u > 0$ on a, \mathbf{E} désignant l'espérance,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\exp u X(t)) &= \prod_{n \leq N} \mathbf{E}(\exp u (\xi_n - w_n) \cos 2\pi n t) \\ &= \exp \sum_{n \leq N} w_n (e^{u \cos 2\pi n t} - 1 - u \cos 2\pi n t) \\ &\leq \exp((e^u - 1 - u) \sum_{n \leq N} w_n) \end{aligned}$$

Pour tout $\lambda > 0$ (nous choisirons $\lambda = \lambda_N$ tendant vers 0)

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X(t) > \lambda \sum_{n \leq N} w_n) &\leq \exp((e^u - 1 - u) \sum_{n \leq N} w_n) \exp(-\lambda u \sum_{n \leq N} w_n) \\ &= \exp((e^u - 1 - u - \lambda u) \sum_{n \leq N} w_n) \end{aligned}$$

Choisissons $u = \log(1 + \lambda)$, pour minimiser le second membre. Le coefficient de $\sum_{n \leq N} w_n$ devient

$$\lambda - (1 + \lambda) \log(1 + \lambda) = -\frac{\lambda^2}{2} + \frac{\lambda^3}{6} - \dots < -\frac{\lambda^2}{3}$$

quand λ est assez petit. D'où

$$\mathbf{P}(X(t) > \lambda \sum_{n \leq N} w_n) \leq \exp\left(-\frac{\lambda^2}{3} \sum_{n \leq N} w_n\right),$$

puis, en appliquant la même inégalité à $-X(t)$,

$$\mathbf{P}(|X(t)| > \lambda \sum_{n \leq N} w_n) \leq 2 \exp\left(-\frac{\lambda^2}{3} \sum_{n \leq N} w_n\right).$$

Or $\sum_{n \leq N} w_n = a_N \log N$, $\lim_{N \rightarrow \infty} a_N = \infty$. Choisissons $\lambda = \lambda_N$ tendant vers 0, mais tel que $a_N \lambda_N^2$ tende vers ∞ . Alors

$$(7) \quad \mathbf{P}(|X_N(t)| > \lambda_N \sum_{n \leq N} w_n) \leq N^{-3}$$

pour N assez grand. Comme $X_N(t)$ est un polynôme trigonométrique de degré $\leq N$ on contrôle sa norme dans $C(\mathbb{T})$ par un échantillonnage de $2N$ points t_j :

$$(8) \quad \sup_t |X_N(t)| \leq C \sup_{1 \leq j \leq 2N} |X_N(t_j)| \quad C : \text{constante absolue.}$$

En appliquant (7) aux t_j , on obtient

$$(9) \quad \mathbf{P} \left(\sup_t |X_N(t)| > \lambda_N \sum_{n \leq N} w_n \right) \leq 2CN^{-2}.$$

Il suit de là que p.s. $\sup_t |X_N(t)| \leq \lambda_N \sum_{n \leq N} w_n$ pour N assez grand. De même pour $\sup_t |Y_N(t)|$. Cela entraîne (6).

Références

- [1] J. P. Kahane et Y. Katznelson, Entiers aléatoires et analyse harmonique, *ce volume*.
- [2] H. Niederreiter, Communication orale.
Luminy, “Répartition modulo 1”, 22 janvier, 2008.
- [3] A. Zygmund, Trigonometric series. Vol. I, Second edition,
Cambridge Mathematical Library, Cambridge University Press, 1959.