Séminaire BOURBAKI Juin 2012
64ème année, 2011-2012, n° 1057

PERFECTOÏDES, PRESQUE PURETÉ ET MONODROMIE-POIDS
[d'après Peter Scholze]

par **Jean–Marc FONTAINE**

INTRODUCTION

Quiconque s'est intéressé aux corps locaux sait bien qu'une extension très ramifiée du corps $\mathbb{Q}_p$ des nombres p-adiques ressemble à s'y méprendre à un corps de séries formelles à coefficients dans son corps résiduel. C'est sans doute Marc Krasner qui a tenté le premier de formuler [Kr] ce phénomène abondamment utilisé depuis en théorie de Hodge p-adique où une construction cruciale associe à toute extension algébrique K de $\mathbb{Q}_p$ suffisamment ramifiée un corps parfait valué complet de caractéristique p noté ici $K^\flat$ [1].

Dans [Sc1], Peter Scholze systématise cette construction. Un *corps perfectoïde* est un corps complet pour une valeur absolue non archimédienne non discrète à corps résiduel de caractéristique p tel que le Frobenius $x \mapsto x^p$ est surjectif sur la réduction modulo p de l'anneau de ses entiers. Scholze introduit une catégorie d'espaces analytiques sur K [2], les *espaces perfectoïdes sur* K et montre qu'elle est équivalente à la catégorie des espaces perfectoïdes sur $K^\flat$. Cette équivalence respecte les morphismes étales. Ce résultat contient le théorème de presque pureté de Faltings (qui est à la base de l'approche *presque étale* des théorèmes de comparaison p-adique) et en donne une preuve limpide.

Lorsque X est une intersection complète dans un espace projectif ou, plus généralement, dans une variété torique sur un corps local de caractéristique 0, Scholze montre que la cohomologie étale ℓ-adique (pour $\ell \neq p$) de X se réalise comme un facteur direct de celle d'une variété en caractéristique p, ce qui lui permet de déduire, dans ce cas, la conjecture monodromie-poids du théorème de Deligne en égale caractéristique.

Ces techniques devraient avoir bien d'autres applications. Dans une prépublication trop récente pour que je puisse en parler sérieusement ici [Sc2], Scholze les utilise pour

1. Mais souvent noté $R(K)$ ou $\mathcal{R}(K)$ dans la littérature. Dans [FW] et [Wi], on associe à toute extension arithmétiquement profinie E de $\mathbb{Q}_p$ (par exemple sa $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique), son *corps des normes* $\widetilde{E}$ ($\simeq \mathbb{F}((t))$ si $\mathbb{F}$ est le corps résiduel de E) et on montre que la théorie de Galois (ou le petit site étale) de E s'identifie à celle de $\widetilde{E}$. Le complété K de E est alors un corps perfectoïde et $K^\flat$ est le complété de la clôture radicielle de $\widetilde{E}$. Les petits sites étales de E, K, $\widetilde{E}$ et $K^\flat$ s'identifient.

2. Ce sont des espaces adiques au sens de Huber [Hu1].

obtenir de nombreux résultats sur la théorie de Hodge p-adique des variétés rigides analytiques sur les corps p-adiques. Soit k un corps de caractéristique 0, complet pour une valeur absolue telle que $|p| < 1$, à corps résiduel parfait et soit X une variété rigide analytique propre et lisse sur k. Scholze obtient, entre autres

– lorsque k est algébriquement clos, la finitude de la cohomologie d'un système local de p-torsion sur $X_{ét}$,

– lorsque la valuation de k est discrète, l'analogue du théorème de comparaison entre cohomologie de de Rham et cohomologie étale p-adique pour les $\mathbb{Q}_p$-faisceaux lisses de de Rham.

Je remercie Laurent Fargues, Luc Illusie et Peter Scholze pour leur aide dans la préparation de cet exposé.

0.1. Conventions et notations

Dans tout ce texte, les anneaux sont commutatifs. Si A est un anneau, une A-algèbre est associative, commutative et unitaire. Si k est un corps, on note $\overline{k}$ une clôture séparable choisie de k.

Une *norme* sur un anneau A est ultramétrique et sous-multiplicative. C'est donc une application

$$| \; | : A \to \mathbb{R}_{\geq 0}$$

telle que $|a| = 0 \iff a = 0$, $|1| = 1$, $|a + b| \leq \max\{|a|, |b|\}$, $|ab| \leq |a|.|b|$.

Une norme $| \; |$ sur un anneau A le munit d'une structure d'anneau topologique séparé. Deux normes sur A sont *équivalentes* si elles définissent la même topologie.

Un *anneau de Banach*[3] est un anneau topologique dont la topologie peut être définie par une norme, qui est complet et qui admet une *pseudo-uniformisante*, c'est-à-dire un élément topologiquement nilpotent inversible.

Si A est un anneau de Banach et si $| \; |$ est une norme sur A qui définit sa topologie, on dit qu'une partie M de A est bornée, s'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $|a| \leq C$ pour tout $a \in M$. Cette propriété ne dépend pas du choix de la norme.

Si A est une k-algèbre de Banach, A_0 un sous-anneau ouvert borné, $\varpi \in A_0$ une pseudo-uniformisante et $(u_i)_{i \in I}$ est soit une famille d'indéterminées, soit une famille d'éléments d'une A_0-algèbre, on note $A_0{<}(u_i)_{i\in I}{>}$ le séparé complété pour la topologie ϖ-adique de $A_0[(u_i)_{i \in I}]$ et on pose $A{<}(u_i)_{i\in I}{>} = A_0{<}(u_i)_{i\in I}{>}\,[1/\varpi]$ (indépendant du choix de A_0).

On note A^0 (resp. A^{00}) l'ensemble des éléments multiplicativement bornés (resp. topologiquement nilpotents) de A. Donc,

$$A^0 = \left\{a \in A \mid \exists C \in \mathbb{R} \text{ avec } |a^n| \leq C, \forall n\right\}, \; A^{00} = \left\{a \in A \mid |a^n| \to 0 \text{ quand } n \to +\infty\right\}.$$

Alors A^0 est un sous-anneau ouvert de A tandis que A^{00} est un idéal ouvert de A^0. Ils sont tous les deux indépendants du choix de $| \; |$.

3. C'est ce que Huber [Hu1] appelle un *anneau de Tate complet*.

Un *anneau de Banach de type pm* est un anneau de Banach A tel que A^0 est borné. On voit facilement que ceci équivaut à l'existence d'une norme $|\ |$ définissant la topologie qui est *multiplicative pour les puissances*, i.e. telle que $|a^n| = |a|^n$ $(\forall a \in A, n \in \mathbb{N})$. Si $|\ |$ est ainsi, on a alors

$$A^0 = \{a \in A \mid |a| \leq 1\} \quad \text{et} \quad A^{00} = \{a \in A \mid |a| < 1\}.$$

Un anneau de Banach de type pm est réduit.

1. CORPS ET ALGÈBRES PERFECTOÏDES

1.1. Anneaux perfectoïdes

Dans toute la suite, p est un nombre premier fixé. Si R est un anneau de caractéristique p, on note $\varphi_R : R \to R$ le *Frobenius absolu*, i.e. l'application définie par $\varphi_R(x) = x^p$.

Un *anneau perfectoïde* est un anneau de Banach A de type pm qui admet une pseudo-uniformisante ϖ telle que $p \in \varpi^p A^0$ et que $\varphi_{A^0/\varpi^p A^0}$ est surjectif.

Si A est un anneau perfectoïde, une A-algèbre perfectoïde est une paire (B, ι) formée d'un anneau perfectoïde B et d'un homomorphisme continu $\iota : A \to B$. Avec comme morphismes les homomorphismes continus de A-algèbres, les A-algèbres perfectoïdes forment une catégorie.

Un *corps perfectoïde* est un anneau perfectoïde K qui est un corps et dont la topologie peut être définie par une *valeur absolue*, autrement dit une norme *multiplicative*, i.e. telle que $|ab| = |a|.|b|$ $(\forall a, b \in K)$ [(4)].

1.2. Exemples

1. Soit A un anneau de Banach de type pm de caractéristique p. Alors A est perfectoïde si et seulement s'il est parfait.
2. Soit K un corps complet pour une valeur absolue $|\ |$ telle que $|p| < 1$. Alors K est un corps perfectoïde si et seulement si ou bien K est parfait de caractéristique p, ou bien K est de caractéristique 0, l'inclusion $pK^0 \subset K^{00}$ est stricte et φ_{K^0/pK^0} est surjectif. C'est en particulier le cas lorsque K est algébriquement clos.
3. Soit A un anneau perfectoïde de caractéristique p et ϖ une pseudo-uniformisante. Alors le corps perfectoïde K complété de la clôture radicielle de $\mathbb{F}_p((\varpi))$ s'identifie à un sous-corps fermé de A et on peut considérer A comme une K-algèbre perfectoïde.

4. On prendra donc garde qu'il est fort possible, bien que nous n'en connaissions pas d'exemple, qu'il existe une algèbre perfectoïde qui est un corps, sans pour autant être un corps perfectoïde. Les corps perfectoïdes jouent un rôle important en théorie de Hodge p-adique (dans [FF1], on les appelle des *corps strictement p-parfaits*). La terminologie « perfectoïde » est due à Scholze qui définit d'abord les corps perfectoïdes, puis les algèbres perfectoïdes sur un corps perfectoïde.

1.3. Basculement

Le *basculement* ou *tilting*[5] est un foncteur de la catégorie des anneaux perfectoïdes dans celle des anneaux perfectoïdes de caractéristique p :

Si A est un anneau perfectoïde, on note $A^\flat$ l'ensemble des suites $a = (a^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A vérifiant $(a^{(n+1)})^p = a^{(n)}$ ($\forall n \in \mathbb{N}$). Si $a, b \in A^\flat$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ la suite des $(a^{(n+m)} + b^{(n+m)})^{p^m}$ tend vers une limite $(a+b)^{(n)}$ lorsque $m \to +\infty$. En outre $a + b = ((a+b)^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et $ab = (a^{(n)}b^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ appartiennent à $A^\flat$ qui, muni de ces deux lois, devient un anneau parfait de caractéristique p.

Si $|\ |$ est une norme multiplicative pour les puissances sur A qui définit sa topologie, alors $|\ |^\flat : A^\flat \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, définie par $|a|^\flat = |a^{(0)}|$ est une norme multiplicative pour les puissances sur $A^\flat$, la topologie qu'elle définit ne dépend pas du choix de $|\ |$ et fait de $A^\flat$ un anneau perfectoïde de caractéristique p.

Si A est de caractéristique p, l'application de $A^\flat$ dans A qui envoie a sur $a^{(0)}$ est un homéomorphisme de $A^\flat$ sur A qui permet d'identifier ces deux anneaux perfectoïdes.

Si A est un anneau perfectoïde et s'il existe une norme $|\ |$ sur A qui définit la topologie de A et est multiplicative, alors $|\ |^\flat$ est aussi multiplicative. En particulier, si K est un corps perfectoïde, $K^\flat$ est un corps perfectoïde.

Soit ϖ une pseudo-uniformisante de A telle que $p \in \varpi A^0$. Si $a \in A^{\flat 0} = (A^\flat)^0$, alors $a^{(n)} \in A^0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Notons a_n l'image de $a^{(n)}$ dans $A^0/\varpi A^0$. Alors $a_{n+1}^p = a_n$ pour tout n et l'application

$$\rho_{A,\varpi} : A^{\flat 0} \to \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} A^0/\varpi A^0 \quad (\text{avec } \varphi_{A^0/\varpi A^0} \text{ comme application de transition}),$$

qui envoie $a = (a^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ sur $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, permet d'identifier l'anneau topologique $A^{\flat 0}$ à cette limite projective (avec la topologie discrète sur chaque terme).

1.4. K-relèvement

Si R est un anneau parfait de caractéristique p, l'anneau $W(R)$ des vecteurs de Witt à coefficients dans R est l'unique (à isomorphisme unique près) anneau sans p-torsion, séparé et complet pour la topologie p-adique dont la réduction mod p est R. On note $x \mapsto [x]$ l'unique section multiplicative de la projection de $W(R)$ sur R. Tout élément de $W(R)[1/p]$ s'écrit d'une manière et d'une seule sous la forme

$$\sum_{i \gg -\infty} [x_n]p^n \quad \text{avec les } x_n \in R\ .$$

Soit R un anneau perfectoïde de caractéristique p. Posons

$$B^b(R) = \Big\{ \sum_{i \gg -\infty} [x_n]p^n \in W(R)[1/p] \mid \text{ les } x_n \text{ sont bornés } \Big\}.$$

5. Ici encore on adopte la terminologie et la notation de Scholze. Cette vieille construction de la théorie de Hodge p-adique n'avait pas été baptisée jusqu'ici.

C'est un sous-anneau de $W(R)[1/p]$: Si l'on choisit une pseudo-uniformisante ϖ de R, on a $B^b(R) = W(R^0)[\frac{1}{[\varpi]}, \frac{1}{p}]$.

Appelons *élément R-primitif de degré* 1 tout $\xi = \sum_{n=0}^{+\infty}[x_n]p^n \in W(R^0)$ tel que x_1 est inversible dans R^0 et que x_0 est une pseudo-uniformisante. Un *idéal primitif de degré* 1 de $B^b(R)$ est un idéal principal qui peut être engendré par un élément primitif de degré 1.

Une *paire perfectoïde* est une paire (R, I) formée d'un anneau perfectoïde de caractéristique p et d'un idéal I de $B^b(R)$ primitif de degré 1.

Soit A un anneau perfectoïde de caractéristique 0. On vérifie facilement que l'application

$$\theta_A : B^b(A^\flat) \to A$$

qui envoie $\sum_{n\gg-\infty}[a_n]p^n$ sur $\sum_{n\gg-\infty} a_n^{(0)}p^n$ est un homomorphisme surjectif dont le noyau est un idéal primitif de degré 1.

Avec une définition évidente des morphismes, les paires perfectoïdes forment une catégorie et la correspondance $A \mapsto (A^\flat, \ker(\theta_A))$ est fonctorielle. La proposition suivante est évidente :

PROPOSITION 1.1. — *Si (R, I) est une paire perfectoïde, $B^b(R)/I$ est un anneau perfectoïde, $(B^b(R)/I)^0$ étant l'image de $W(R^0)$. Le foncteur*

$$\textit{Anneaux perfectoïdes de caractéristique } 0 \to \textit{Paires perfectoïdes},$$

qui envoie A sur $(A^\flat, \ker(\theta_A))$ est une équivalence de catégories. Le foncteur $(R, I) \mapsto B^b(R)/I$ est un quasi-inverse.

Soient maintenant K un corps perfectoïde et $\xi \in W(K^{\flat 0})$ un élément primitif qui engendre le noyau de θ_K. Si R est une $K^\flat$-algèbre perfectoïde, alors $W(R^0)$ contient $W(K^{\flat 0})$ et ξ est encore un élément primitif de degré 1. Par conséquent

$$R_K^\sharp = B^b(R)/(\xi) = K \otimes_{B^b(K^\flat)} B^b(R)$$

est une K-algèbre perfectoïde. Inversement, si A est une K-algèbre perfectoïde, alors $A^\flat$ est une $K^\flat$-algèbre perfectoïde. Donc :

THÉORÈME 1.2 ([Sc1], th. 5.2, cf. aussi [FF2], [KL]). — *Soient K un corps perfectoïde de caractéristique 0 et K-Perf (resp. $K^\flat$-Perf) la catégorie des K-algèbres (resp. $K^\flat$-algèbres) perfectoïdes. Le foncteur*

$$K\textit{-Perf} \to K^\flat\textit{-Perf}$$

qui envoie A sur $A^\flat$ est une équivalence de catégories.

Le foncteur $R \mapsto R_K^\sharp$ est un quasi-inverse que nous appelons le *K-relèvement.*

Beaucoup de résultats sur les perfectoïdes en caractéristique 0 se déduisent alors des résultats analogues en caractéristique p. Mais pas tous : si A est une K-algèbre perfectoïde, et si B est une A-algèbre finie étale, il n'est pas si facile, lorsque A est de caractéristique 0, de montrer que B est encore perfectoïde !

1.5. L'exemple de la théorie de Hodge p-adique

Soient $\mathbb{F}$ un corps parfait de caractéristique p, k le corps des fractions de $W(\mathbb{F})$ et C le complété de $\overline{k}$ qui est un corps perfectoïde. Choisissons $\varepsilon, \pi \in C^\flat$ tels que $\varepsilon^{(0)} = 1, \varepsilon^{(1)} \neq 1, \pi^{(0)} = p$. Le corps K_ε engendré sur k par les $\varepsilon^{(n)}$ est donc l'extension de k engendrée par les racines de l'unité d'ordre une puissance de p et est une extension abélienne totalement ramifiée dont le groupe de Galois est canoniquement isomorphe au groupe $\mathbb{Z}_p^*$ des unités p-adiques. L'extension K_π engendrée par les π_n est une extension totalement ramifiée non galoisienne qui, pour tout $n \in \mathbb{N}$, contient une unique extension de degré p^n de k (le corps $k[\pi^{(n)}]$) et est la réunion de ces corps. L'extension K_ε/k (resp. K_π/k est *arithmétiquement profinie* et le corps $\mathbb{F}((\varepsilon-1))$ (resp. $\mathbb{F}(\pi))$) s'identifie au *corps des normes* de cette extension ([FW], [Wi]). Les complétés $\widehat{K}_\varepsilon$ de K_ε et $\widehat{K}_\pi$ de K_π sont des corps perfectoïdes et $\widehat{K}_\varepsilon^\flat$ (resp. $\widehat{K}_\pi^\flat$) s'identifie au complété de la clôture radicielle de $\mathbb{F}((\varepsilon-1))$ (resp. $\mathbb{F}((\pi))$).

Le corps C est une algèbre perfectoïde sur $\widehat{K}_\varepsilon^\flat$ aussi bien que sur $\widehat{K}_\pi^\flat$ ce qui fait que

$$C = (C^\flat)^\sharp_{K_\varepsilon} = \widehat{K}_\varepsilon \otimes_{B^b(\widehat{K}_\varepsilon)} B^b(C^\flat) \;=\; (C^\flat)^\sharp_{K_\pi} = \widehat{K}_\pi \otimes_{B^b(\widehat{K}_\pi)} B^b(C^\flat)$$

et que le noyau de l'homomorphisme surjectif $\theta_C : B^b(C^\flat) \to C$ est l'idéal principal engendré par un générateur ξ_ε du noyau de $\theta_{\widehat{K}_\varepsilon}$ aussi bien que par un générateur ξ_π du noyau de $\theta_{\widehat{K}_\pi}$ [6]. Les fermetures algébriques $\widehat{K}_\varepsilon^{\mathrm{sep}}$ de $\widehat{K}_\varepsilon$ et $\widehat{K}_\pi^{\mathrm{sep}}$ de $\widehat{K}_\pi$ sont denses dans C. Le groupe de Galois $H_\varepsilon = \mathrm{Gal}(\widehat{K}_\varepsilon^{\mathrm{sep}}/\widehat{K}_\varepsilon) = \mathrm{Gal}(\overline{k}/K_\varepsilon)$ opère par continuité sur C donc aussi sur $C^\flat$, laisse stable la clôture séparable $\widehat{K}_\varepsilon^{\flat,\mathrm{sep}}$ de $\widehat{K}_\varepsilon^\flat$ dans $C^\flat$ et s'identifie à $\mathrm{Gal}(\widehat{K}_\varepsilon^{\flat,\mathrm{sep}}/K_\varepsilon^\flat)$, ce qui est un cas particulier du théorème 3.2 ci-dessous. De même $H_\pi = \mathrm{Gal}(\widehat{K}_\pi^{\mathrm{sep}}/\widehat{K}_\pi) = \mathrm{Gal}(\overline{k}/K_\pi)$ s'identifie à $\mathrm{Gal}(\widehat{K}_\pi^{\flat,\mathrm{sep}}/K_\pi^\flat)$.

1.6. Le langage des presque mathématiques

Scholze donne du théorème 1.2 une preuve plus savante (qui n'utilise pas le foncteur de K-relèvement) mais qui nous en dit plus.

Rappelons brièvement, dans le cas particulier où nous en avons besoin, le langage des *presque mathématiques* introduit par Faltings à cette occasion ([Fa1],[Fa2]) et développé par Gabber et Ramero [GR] : On se donne un corps perfectoïde K et on note $\mathfrak{m} = K^{00}$ l'idéal maximal de K^0 [7]. Les K^0-modules *presque nuls*, i.e. ceux qui sont annulés par $\mathfrak{m}$ forment une sous-catégorie de Serre de la catégorie K^0-Mod des K^0-modules. La

6. On peut prendre $\xi_\pi = p - [\pi]$ et $\xi_\varepsilon = \sum_{i=0}^{p-1}[\varepsilon^{i/p}]$. Le corps $C^\flat$ est algébriquement clos et l'anneau B_{dR}^+ des périodes p-adiques n'est autre que le séparé complété pour la topologie $\ker(\theta_C)$-adique de $B^b(C^\flat)$. L'analogue p-adique de $2\pi i$, qui est une uniformisante de l'anneau de valuation discrète B_{dR}^+ est $t = \log[\varepsilon]$ (la série $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{([\varepsilon]-1)^n}{n}$ converge dans B_{dR}^+).

7. Pour cette partie on pourrait, moyennant quelques modifications mineures, remplacer le couple $(K^0, \mathfrak{m})$ par un couple $(V, \mathfrak{m})$ avec V anneau commutatif et $\mathfrak{m}$ idéal de V tel que $\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}$.

catégorie K^{0a}-Mod des *presque K^0-modules* (on dit aussi *K^{0a}-modules*) est la catégorie quotient obtenue par localisation. Les objets sont donc les K^0-modules, mais, pour éviter des confusions, si M est un K^0-module on note M^a le K^{0a}-module qui est M vu comme objet de K^{0a}-Mod. Si M, N sont deux K^0-modules, l'ensemble des morphismes, dans K^{0a}-Mod, de M dans N s'identifie en fait au K^0-module

$$\mathrm{Hom}_{K^{0a}}(M^a, N^a) = \mathrm{Hom}_{K^0}(\mathfrak{m} \otimes M, N).$$

Pour tout K^0-module M, posons $M_a = \mathrm{Hom}_{K^{0a}}(K^{0a}, M^a) = \mathrm{Hom}_{K^0}(\mathfrak{m}, M)$. Disons que M est *saturé* [8] si l'application $M \to M_a$ qui envoie x sur l'application $\lambda \mapsto \lambda x$ est un isomorphisme. Pour tout K_0-module M, M_a est saturé.

Le foncteur de localisation a un adjoint à droite

$$K^{0a}\text{-Mod} \to K^0\text{-Mod} \quad : \quad M \mapsto M_* = \mathrm{Hom}_{K^{0a}}(K^{0a}, M) \ (= N_a \quad \text{si} \quad M = N^a)$$

qui induit une équivalence entre K^{0a}-Mod et la sous-catégorie pleine de K^0-Mod dont les objets sont les K^0-modules saturés.

La catégorie K^{0a}-Mod est munie d'un hom interne noté alHom et d'un produit tensoriel : si M, N sont des K^0-modules, on a

$$\mathrm{alHom}(M, N) = \mathrm{Hom}_{K^0}(M, N)^a = \mathrm{Hom}_{K^{0a}}(M^a, N^a)^a \ , \ M^a \otimes N^a = (M \otimes_{K^0} N)^a$$

et c'est une catégorie abélienne tensorielle K^{0a}-linéaire.

Ceci permet de définir la catégorie des *presque K^0-algèbres* (ou *K^{0a}-algèbres*). Si A est une K^{0a}-algèbre, alors A_* est une K^0-algèbre qui est saturée en tant que K^0-module et $A = (A_*)^a$. Si A est une K^{0a}-algèbre, on peut définir la catégorie A-Mod des *A-modules*. C'est aussi le quotient de la catégorie des A_*-modules par la sous-catégorie de Serre des A_*-modules *presque nuls*, i.e. annulés par $\mathfrak{m}$. On a une équivalence entre A-Mod et la sous-catégorie pleine de A_*-Mod dont les objets sont saturés (en tant que K^0-modules). La catégorie A-Mod est de façon évidente une catégorie abélienne tensorielle A_*-linéaire.

Soit R une K^0-algèbre. On dit qu'un R^a-module M est *plat* (resp. *presque projectif*) [9] si le foncteur de la catégorie des R^a-modules dans elle-même

$$X \mapsto M \otimes X \quad (\text{resp. } X \mapsto \mathrm{alHom}(M, X))$$

est exact. Si $M = N^a$, alors M est plat (resp. presque projectif) si et seulement si N est presque plat (resp. presque projectif), i.e. si, pour tout R-module Y et tout $i > 0$, le R-module $\mathrm{Tor}_i^R(N, Y)$ (resp. $\mathrm{Ext}^i_R(N, Y)$) est presque nul.

Venons-en à la preuve de Scholze du théorème 1.2. Choisissons une pseudo-uniformisante ϖ de K^0 telle que $p \in \varpi K^0$. Notons ϖ' une pseudo-uniformisante telle que $(\varpi')^p$ et ϖ engendre le même idéal. On introduit :

8. Il semble que ces modules n'aient pas de nom dans la littérature.

9. La notion naturelle de R^a-module projectif n'est pas très utile, ne serait-ce que parce que R^a n'est pas un R^a-module projectif.

1. la catégories K^{0a}/ϖ-Perf des K^{0a}/ϖ-*algèbres perfectoïdes*, qui est la sous-catégorie pleine de la catégorie des presque K^0/ϖ-algèbres dont les objets sont les K^{0a}/ϖ-algèbres plates R telles que le Frobenius $x \mapsto x^p$ induit un isomorphisme

$$\Phi : R/\varpi' R \to R,$$

2. la catégories K^{0a}-Perf des K^{0a}-*algèbres perfectoïdes*, qui est la sous-catégorie pleine de la catégorie des presque K^0-algèbres dont les objets sont les K^{0a}-algèbres plates A dont la réduction mod ϖ est une K^{0a}-algèbre perfectoïde.

Si A est une K-algèbre perfectoïde, $A^{0a} = (A^0)^a$ est une K^{0a}-algèbre perfectoïde. On obtient ainsi une équivalence entre K-Perf et K^{0a}-Perf (un quasi-inverse s'obtient en associant à une K^{0a}-algèbre perfectoïde B la K-algèbre $B_*[1/\varpi]$). Scholze prouve alors l'équivalence de catégories entre K-Perf et $K^\flat$-Perf en appliquant le théorème suivant à K et à $K^\flat$:

THÉORÈME 1.3 ([Sc1], th. 5.10). — *Le foncteur réduction mod ϖ induit une équivalence de catégories*

$$K^{0a}\text{-Perf} \to (K^{0a}/\varpi)\text{-Perf}.$$

La preuve consiste à vérifier d'une part que, pour tout $n \geq 1$ et toute K^{0a}/ϖ^n-algèbre plate A dont la réduction mod ϖ est perfectoïde, il existe une unique (à isomorphisme unique près) K^{0a}/ϖ^{n+1}-algèbre plate qui relève A et d'autre part le résultat analogue pour les morphismes. Ce sont les résultats d'Illusie sur le complexe cotangent ([Il1], III.2.1.3 et 2.2.2) étendus par Gabber et Ramero au cas des presque algèbres ([GR], prop. 3.29 et 3.2.16) qui permettent de résoudre le problème : Les obstructions à l'existence de relèvement et les classes d'isomorphismes de relèvements (s'il y en a) s'expriment en terme du complexe cotangent $\mathbb{L}^a_{A/(K^{0a}/\varpi^n)}$. Il suffit de montrer que ce complexe est nul. Par un dévissage évident, on se ramène à $n = 1$ qui résulte essentiellement de ce que si R est un anneau tué par p sur lequel le Frobenius est surjectif, alors toute forme différentielle sur R est nulle.

2. ESPACES ADIQUES ET PERFECTOÏDES

Dans le monde ultramétrique, les géométries analytiques les plus communément utilisées sont la *géométrie rigide* introduite par Tate, développée par Kiehl et transformée par Raynaud en l'étude des fibres génériques des schémas formels ([Ab], [BGR]), la géométrie des *espaces de Berkovich* [Be] et celle des espaces adiques de Huber [Hu1]. C'est cette dernière qu'utilise Scholze pour globaliser la notion d'anneau perfectoïde.

2.1. Espaces adiques

Dans ce qui suit, k est un corps complet pour une valeur absolue non archimédienne. Pour fixer les idées, on choisit un élément non nul ϖ de l'idéal maximal de k^0. Rappelons brièvement la définition des k-espaces adiques de Huber [(10)] :

a) Introduisons des *catégories auxiliaires*, $\mathcal{V}_k^{\mathrm{pre}}$ et $\mathcal{V}_k$:

– Un objet de $\mathcal{V}_k^{\mathrm{pre}}$ est un triplet $(X, \mathcal{O}_X, (k(x)^+)_{x\in X})$ où X est un espace topologique, $\mathcal{O}_X$ un pré-faisceau de k-algèbres topologiques dont les fibres sont des anneaux locaux et, pour tout $x \in X$, $k(x)^+$ est un anneau de valuation dont le corps des fractions est le corps résiduel $k(x)$ de $\mathcal{O}_{X,x}$.

– Un morphisme

$$f : (X, \mathcal{O}_X, (k(x)^+)_{x\in X}) \to (Y, \mathcal{O}_Y, k(y)^+)_{y\in Y})$$

est un morphisme des « espaces pré-annelés » sous-jacents tel que, pour tout ouvert V de Y, l'application $\mathcal{O}_Y(V) \to \mathcal{O}_X(f^{-1}(V))$ est un homomorphisme continu de k-algèbres et que, pour tout $x \in X$, l'homomorphisme $\mathcal{O}_{Y,f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ est un homomorphisme d'anneaux locaux, l'application $k(f(x)) \to k(x)$ induite envoyant $k(f(x))^+$ dans $k(x)^+$.

La catégorie $\mathcal{V}_K$ est la sous-catégorie pleine de $\mathcal{V}_k^{\mathrm{pre}}$ dont les objets $(X, \mathcal{O}_X, (k(x)^+)_{x\in X})$ sont tels que $\mathcal{O}_X$ est un faisceau.

b) Une *k-algèbre affinoïde* [(11)] est une paire (R, R^+) où R est une k-algèbre de Banach et R^+ un sous-anneau ouvert intégralement clos de R^0. On lui associe son *spectre adique* $\mathrm{Spa}(R, R^+)$ qui est un objet $(X, \mathcal{O}_X, (k(x)^+)_{x\in X})$ de $\mathcal{V}_k^{\mathrm{pre}}$:

– L'espace sous-jacent à X est l'ensemble des paires $x = (\mathfrak{p}_x, k(x)^+)$ où $\mathfrak{p}_x$ est un idéal premier fermé de R et $k(x)^+$ est un anneau de valuation qui a même corps des fractions $k(x)$ que $R/\mathfrak{p}_x$, qui contient l'image de R^+ et est tel que $R^+ \to k(x)^+$ est continue (où $k(x)^+$ est muni de la topologie définie par la valuation).

On remarque que le quotient Γ_x du groupe multiplicatif de $k(x)$ par le groupe des unités de $k(x)^+$ est un groupe abélien totalement ordonné ($\gamma \geq 1$ si γ est l'image d'un élément non nul de $k(x)^+$). Si $x \in X$ et $f \in R$, on note $f(x)$ l'image de f dans $R/\mathfrak{p}_x$ et $|f(x)|$ l'image de $f(x)$ dans Γ_x (on convient que $|0| = 0$ et que $0 < \gamma$, pour tout $\gamma \in \Gamma_x$) [(12)].

– Une base de la topologie de X est formée par les *ouverts rationnels*, i.e. les $U \subset X$ tels qu'il existe $f_1, f_2, \ldots, f_n, g \in R$ vérifiant $R = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ et

$$U = U\left(\frac{f_1, \ldots, f_n}{g}\right) := \bigl\{x \in X \mid |f_i(x)| \leq |g(x)|\ ,\ \forall i\bigr\}.$$

10. On peut définir des espaces adiques plus ou moins généraux. Comme Scholze, ceux que nous considérons ici sont ceux que Huber appelle les *k-espaces adiques analytiques* ([Hu2], p. 39).

11. Chez Huber, les algèbres affinoïdes ne sont pas forcément complètes.

12. Chez Scholze qui suit Huber, X est défini comme l'ensemble des classes d'équivalence de *valuations* (i.e. des « semi-normes multiplicatives pas nécessairement de hauteur 1 ») continues telles que $|f(x)| \leq 1$ pour tout $f \in R^+$. Chaque classe a un représentant canonique qui est celui que nous avons décrit.

– Soit $U = U(\frac{f_1,\ldots,f_n}{g})$ un ouvert rationnel. On munit $R[\frac{f_1}{g},\ldots,\frac{f_n}{g}]$ de la topologie ϖ-adique (i.e. de la topologie pour laquelle, si R_0 est un sous-anneau ouvert borné de R contenant ϖ, les images des $\varpi^n R_0[\frac{f_1}{g},\ldots,\frac{f_n}{g}]$ pour $n \in \mathbb{N}$ forment un système fondamental de voisinages ouverts de 0). On note $\mathcal{O}_X^+(U)$ le séparé complété pour la topologie induite de la fermeture intégrale de $R^+[\frac{f_1}{g},\ldots,\frac{f_n}{g}]$ dans $R[\frac{f_1}{g},\ldots,\frac{f_n}{g}]$ et on pose $\mathcal{O}_X(U) = \mathcal{O}_X^+(U)[1/\varpi]$.

On vérifie que $(\mathcal{O}_X(U), \mathcal{O}_X^+(U))$ est une k-algèbre affinoïde qui ne dépend que de U (et pas des choix des f_i et de g).

Pour tout ouvert U, si $\mathcal{U}$ désigne l'ensemble des ouverts rationnels $\subset U$, on pose $\mathcal{O}_X(U) = \varprojlim_{V \in \mathcal{U}} \mathcal{O}_X(V)$.

On vérifie que, pour tout $x \in X$, la fibre $\mathcal{O}_{X,x}$ est bien un anneau local de corps résiduel $k(x)$.

c) Appelons *k-algèbre affinoïde de Huber* toute k-algèbre affinoïde (R, R^+) telle que, si $\mathrm{Spa}(R, R^+) = (X, \mathcal{O}_X, (k(x)^+)_{x \in X})$, alors $\mathcal{O}_X$ est un faisceau. Elles forment de façon évidente une catégorie et Spa définit un foncteur contravariant pleinement fidèle de cette catégorie dans $\mathcal{V}_k$. L'image essentielle de ce foncteur est la catégorie des *k-espaces adiques affinoïdes.* Un *k-espace adique* est un objet de $\mathcal{V}_k$ qui admet un recouvrement ouvert par des k-espaces adiques affinoïdes.

2.2. Remarques et exemples

1. Tout k-espace adique X est naturellement muni d'un sous-préfaisceau d'anneaux $\mathcal{O}_X^+$ de $\mathcal{O}_X$ défini par
$$\mathcal{O}_X^+(U) = \{f \in \mathcal{O}_X(U) \mid |f(x)| \leq 1,\ \forall x \in U\}.$$
Si X est affinoïde, alors X s'identifie à $\mathrm{Spa}(\mathcal{O}_X(X), \mathcal{O}_X^+(X))$.

2. Soit (R, R^+) une k-algèbre affinoïde. Elle est de Huber si l'une des deux conditions suivantes est satisfaite (cf. [Hu1],th.2.2) :

   i) l'anneau R contient un sous-anneau ouvert borné qui est noethérien,

   ii) l'anneau R est *fortement noethérien*, i.e. $R\langle T_1, T_2, \ldots, T_n\rangle$ est noethérien pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Huber a construit ([Hu1], prop. 4.3 et 4.5) un foncteur r_k pleinement fidèle de la catégorie des k-espaces rigides analytiques (au sens de Tate-Raynaud) dans celle des k-espaces adiques qui a la propriété que, si $X = \mathrm{Sp}\ R$ est une variété rigide analytique affinoïde, alors $r_k(X) = \mathrm{Spa}(R, R^0)$. Ce foncteur induit une équivalence entre la catégorie des espaces rigides analytiques quasi-séparés et celle des espaces adiques quasi-séparés *localement de type fini*, i.e. qui admettent un recouvrement par des ouverts qui sont des affinoïdes *topologiquement de type fini*, i.e. de la forme $\mathrm{Spa}(R, R^0)$, avec R quotient de $k\langle T_1, T_2, \ldots, T_n\rangle$ pour un $n \in \mathbb{N}$ convenable.

   Huber a également construit ([Hu2], §8.3) une équivalence de catégories entre les k-espaces strictement analytiques de Berkovich qui sont de Hausdorff et les

k-espaces adiques X localement de type fini qui sont *taut* i.e. quasi-séparés et tels que, si $U \subset X$ est un ouvert quasi-compact, son adhérence dans X l'est encore.

Dans cette équivalence de catégorie, les points de l'espace topologique sous-jacent à l'espace de Berkovich sont les points x de l'espace topologique sous-jacent à l'espace adique associé tels que l'anneau de valuation $k(x)^+$ est de hauteur 1.

4. Á tout k schéma localement de type fini , on sait associer ([BGR], §9.3.4) un k-espace rigide analytique X^{an}. Dans la suite, on note $X^{\text{ad}} = r_k(X^{\text{an}})$ le k-espace adique associé.

2.3. Espaces perfectoïdes

Dans ce qui suit, K est un corps perfectoïde et ϖ une pseudo-uniformisante de K. Une *K-algèbre affinoïde perfectoïde* est une paire (A, A^+) où A est une K-algèbre perfectoïde et où A^+ est un sous-anneau ouvert borné intégralement clos de A.

Remarquons que tout sous-anneau ouvert borné intégralement clos d'une K-algèbre perfectoïde A est contenu dans A^0 et contient A^{00}. Se donner A^+ revient donc à se donner son image $\widetilde{A}^+$ dans $\widetilde{A}^0 = A^0/A^{00}$ qui peut être n'importe quel sous-anneau intégralement clos de $\widetilde{A}^0$.

Lorsque (A, A^+) est une K-algèbre affinoïde perfectoïde non réduite à 0 , l'anneau A^+ n'est pas noethérien, ce qui complique souvent les preuves. On a dit qu'on utilise souvent le basculement pour se ramener à K de caractéristique p. Si l'on est dans ce cas, on dit qu'une K-algèbre affinoïde perfectoïde (A, A^+) est *p-finie* s'il existe une K-algèbre affinoïde topologiquement de type fini $(B, B^0) = (B, B^+)$ (nécessairement réduite) telle que A^+ est le complété de la clôture radicielle de B^+. Si (A, A^+) est une K-algèbre affinoïde perfectoïde telle que A^+ est une K^0-algèbre, alors (A, A^+) est le complété d'une limite inductive filtrante de K-algèbres perfectoïdes p-finies. Quitte à remplacer K par le complété de la clôture radicielle de $\mathbb{F}_p((\varpi))$, on peut toujours supposer que A^+ est une K^0-algèbre.

THÉORÈME 2.1. — *Soit (A, A^+) une K-algèbre affinoïde perfectoïde. Posons*

$$(X, \mathcal{O}_X, (k(x)^+)_{x \in X}) = \mathrm{Spa}(A, A^+).$$

Alors $\mathcal{O}_X$ est un faisceau et $H^i(X, \mathcal{O}_X) = 0$ pour tout $i > 0$.

Un *K-espace perfectoïde* est un K-espace adique qui admet un recouvrement par des *K-espaces affinoïdes perfectoïdes* (i.e. des K-espaces adiques de la forme $\mathrm{Spa}(A, A^+)$, avec (A, A^+) une K-algèbre affinoïde perfectoïde). Les K-espaces perfectoïdes forment une sous-catégorie pleine K-Perf de la catégorie des K-espaces adiques.

La preuve du théorème ci-dessus n'est pas si facile mais, chemin faisant, on montre beaucoup plus :

– Supposons d'abord K de caractéristique p. On commence par montrer que, si $U = U(\frac{f_1,\dots,f_m}{g})$ est un ouvert rationnel, $\mathcal{O}_X(U)$ est une K-algèbre perfectoïde et

$$\mathcal{O}_X(U)^0 = (A^0{<}(\frac{f_i^{p^{-n}}}{g^{p^{-n}}})_{1\le i\le m, n\in\mathbb{N}}{>})_a \ .$$

On considère alors le cas où (A, A^+) est *p-finie*. Si (B, B^+) est comme plus haut, l'application $X = \mathrm{Spa}(A, A^+) \to Y = \mathrm{Spa}(B, B^+)$ est alors un homéomorphisme. Le théorème d'acyclicité de Tate ([BGR], §8.2) nous dit que pour tout recouvrement fini $(U_i)_{i\in I}$ de X par des ouverts rationnels, la suite

$$0 \to \mathcal{O}_Y(Y) \to \prod_{i\in I} \mathcal{O}_Y(U_i) \to \prod_{i,j\in I} \mathcal{O}_Y(U_i \cap U_j) \to \dots$$

est exacte, d'où l'on peut déduire que les groupes de cohomologie en degré > 0 de la suite

$$0 \to \mathcal{O}_Y(Y)^0 \to \prod_{i\in I} \mathcal{O}_Y(U_i)^0 \to \prod_{i,j\in I} \mathcal{O}_Y(U_i \cap U_j)^0 \to \dots$$

sont annulés par une puissance de ϖ. En passant au complété de la clôture radicielle, on en déduit que les groupes de cohomologie en degré > 0 du complexe

$$0 \to \mathcal{O}_X(X)^0 \to \prod_{i\in I} \mathcal{O}_X(U_i)^0 \to \prod_{i,j\in I} \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j)^0 \to \dots$$

sont presque nuls. On en déduit que $\mathcal{O}_X$ est un faisceau et que $H^i(X, \mathcal{O}_X) = 0$ pour $i > 0$. Le cas général se déduit du cas p-fini par passage à la limite.

– Supposons maintenant K de caractéristique 0. Quitte à changer ϖ, on peut supposer qu'il existe une pseudo-uniformisante $\varpi^\flat$ de $K^\flat$ telle que $(\varpi^\flat)^{(0)} = \varpi$ et que $pK^0 \subset \varpi K^0$, ce que nous supposons désormais.

Il est immédiat que le basculement induit une équivalence de catégories entre K-algèbres affinoïdes perfectoïdes et $K^\flat$-algèbres affinoïdes perfectoïdes

$$(A, A^+) \mapsto (A^\flat, A^{\flat +}) \ \text{ où } \ A^{\flat +} = (A^+)^\flat = \{(a^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \in A^\flat \mid a^{(0)} \in A^+\} \ .$$

On peut donc considérer le $K^\flat$-espace affine perfectoïde

$$(X^\flat, \mathcal{O}_{X^\flat}, (k(y)^+)_{y\in X^\flat}) = \mathrm{Spa}(A^\flat, A^{\flat +}).$$

Soit $x \in X$. L'application de $A^\flat$ dans $\Gamma_x \cup \{0\}$ qui envoie f sur $|f^{(0)}(x)|$ est une valuation au sens de Huber qui est continue et correspond à un point $x^\flat = (\mathfrak{p}_{x^\flat}, k(x^\flat)^+)$ de $X^\flat$ (en outre $\Gamma_{x^\flat}$ s'identifie à Γ_x).

Si $U = U(\frac{f_1,\dots,f_m}{g}) \subset X^\flat$ est un ouvert rationnel, l'idéal de A^+ engendré par les f_i contient une puissance de $\varpi^\flat$ et, quitte à la rajouter aux f_i, on peut supposer que $f_m = (\varpi^\flat)^N$ avec $N \in \mathbb{N}$. La pré-image de U par l'application $^\flat : X \to X^\flat$ que l'on vient de définir est alors $U^\sharp = U(\frac{f_1^{(0)},\dots,f_m^{(0)}}{g^{(0)}})$ qui est un ouvert rationnel. En particulier l'application est continue. On montre que

$$\mathcal{O}_X(U^\sharp)^0 = \left(A^0<(\frac{f_i^{(n)}}{g^{(n)}})_{1\leq i\leq m, n\in\mathbb{N}}>\right)_a$$

d'où il résulte que $\mathcal{O}_X(U^\sharp)$ est une K-algèbre perfectoïde et que $(\mathcal{O}_X(U^\sharp))^\flat = \mathcal{O}_{X^\flat}(U)$.

Le lemme d'approximation qui suit n'est pas très difficile à montrer, mais il joue un rôle crucial : Soit $m \in \mathbb{N}$. Notons Γ_m le monoïde $(\mathbb{N}[1/p])^m$. Si $K^0<\Gamma_m>$ est le complété pour la topologie ϖ-adique de $K^0[\Gamma_m]$, alors $R_m = K<\Gamma_m> = K^0<\Gamma_m>[1/\varpi]$ est une K-algèbre perfectoïde et $R_m^0 = K^0<\Gamma_m>$. On dit que $f \in R_m$ est homogène de degré $d \in \mathbb{N}[1/p]$ si f peut s'écrire comme une combinaison linéaire finie à coefficients dans K de $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m) \in \Gamma_m$ tels que $\sum_{i=1}^m \gamma_i = d$.

Lemme 2.2. — *Soient $m \in \mathbb{N}$ et $R_m = K<(\mathbb{N}[1/p])^m>$. Soient $N \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon > 0$. Pour tout $f \in R_m^0$ homogène de degré d, il existe $g \in (R_m^0)^\flat$ homogène de degré d tel que, pour tout $x \in X = \mathrm{Spa}(R_m, R_m^0)$,*

$$|f(x) - g^{(0)}(x)| \leq |\varpi(x)|^{1-\varepsilon}. \max\{|f(x)|, |\varpi(x)|^N\}.$$

On en déduit facilement que, si $U = U(\frac{f_1,\dots,f_m}{f_{m+1}}) \subset X$ est un ouvert rationnel tel que f_m est une puissance de ϖ, on peut trouver des $g_i \in A^\flat$ tels que chaque $g_i^{(0)}$ est suffisamment proche de f_i pour que $U = U\left(\frac{g_1^{(0)},\dots,g_m^{(0)}}{g_{m+1}^{(0)}}\right)$. Ceci implique que le basculement induit une bijection entre les ouverts rationnels de X et les ouverts rationnels de $X^\flat$. Comme X est T_0, l'application $X \to X^\flat$ est injective.

Si $y \in X^\flat$, le complété du corps résiduel de y est un corps perfectoïde E contenant $K^\flat$. Toute valuation continue de E définit aussi une valuation de la K-algèbre perfectoïde $E_K^\sharp$, ce qui permet de définir un point $x \in X$ dont l'image est y et $X \to X^\flat$ est aussi surjective.

Si maintenant on a un recouvrement fini de X par des ouverts rationnels $V_i = U_i^\sharp$, on vérifie que la réduction modulo ϖ de la suite

$$0 \to \mathcal{O}_X(X)^0 \to \prod_{i\in I} \mathcal{O}_X(V_i)^0 \to \prod_{i,j\in I} \mathcal{O}_X(V_i \cap V_j)^0 \to \dots$$

est la réduction mod $\varpi^\flat$ de

$$0 \to \mathcal{O}_{X^\flat}(X^\flat)^0 \to \prod_{i\in I} \mathcal{O}_{X^\flat}(U_i)^0 \to \prod_{i,j\in I} \mathcal{O}_{X^\flat}(U_i \cap U_j)^0 \to \dots.$$

Comme la deuxième est presque acyclique en degrés > 0, la première aussi. Ceci implique que $\mathcal{O}_X$ est un faisceau et que $H^i(X, \mathcal{O}_X) = 0$ pour $i > 0$.

Finalement, en recollant les affinoïdes perfectoïdes, on obtient le résultat suivant :

Théorème 2.3. — *Soit X un K-espace perfectoïde. Il existe un $K^\flat$-espace perfectoïde $X^\flat$, unique à isomorphisme unique près, qui est muni d'un isomorphisme fonctoriel*

$$\mathrm{Hom}_{K^\flat\text{-Perf}}(\mathrm{Spa}(A^\flat, A^{\flat+}), X^\flat) = \mathrm{Hom}_{K\text{-Perf}}(\mathrm{Spa}(A, A^+), X),$$

pour toute K-algèbre affinoïde perfectoïde (A, A^+).

Le foncteur $X \mapsto X^\flat$ induit une équivalence entre la catégorie des K-espaces perfectoïdes et celle des $K^\flat$-espaces perfectoïdes. Dans cette équivalence,

– l'espace topologique sous-jacent à $X^\flat$ est celui qui est sous-jacent à X,

– un ouvert U de X est un espace affinoïde perfectoïde si et seulement si son image $U^\flat$ dans $X^\flat$ l'est.

3. TOPOLOGIE ÉTALE ET THÉORÈME DE PRESQUE PURETÉ

3.1. Le résultat principal

Comme précédemment, k est un corps complet non archimédien, K un corps perfectoïde et ϖ une pseudo-uniformisante de k ou de K.

Le fait que les espaces perfectoïdes sont réduits conduit Scholze à donner une définition des morphismes étales différente de la définition classique :

– Un morphisme $(R, R^+) \to (S, S^+)$ de k-algèbres affinoïdes est *fini étale* si S est une R-algèbre finie étale et S^+ est la fermeture intégrale de R^+ dans S.

– Un morphisme $f : X \to Y$ de k-espaces adiques est *fini étale* s'il existe un recouvrement $(V_i)_{i\in I}$ de Y par des ouverts affinoïdes tel que, pour tout $i \in I$, $U_i = f^{-1}(V_i)$ est un affinoïde et le morphisme de k-algèbres affinoïdes

$$(\mathcal{O}_Y(V_i), \mathcal{O}_Y^+(V_i)) \to (\mathcal{O}_X(U_i), \mathcal{O}_X^+(U_i))$$

est fini étale.

– Un morphisme $f : X \to Y$ de k-espaces adiques est *étale* si X admet un recouvrement par des ouverts $(U_j)_{j\in J}$ tel que, pour tout $j \in J$, la restriction de f à U_j est le composé d'une immersion ouverte par un morphisme fini étale.

Pour tout k-espace adique X, notons $X_{ét}$ le couple formé de la catégorie Et/X des espaces adiques étales sur X et de l'ensemble $Cov(X_{ét})$ des *recouvrements étales*, i.e. des familles $(f_i : U_i \to U)_{i\in I}$ de morphismes de Et/X telles que $U = \cup_{i\in I} f_i(U_i)$. L'inconvénient de cette définition des morphismes étales est qu'il n'est pas toujours vrai que $X_{ét}$ est un site.

Lorsque le k-espace adique X est *localement noethérien*, i.e. admet un recouvrement par des ouverts de la forme $\mathrm{Spa}(R, R^+)$ avec R fortement noethérien, la définition des morphismes étales coïncide avec la définition usuelle ([Hu2], Lemma 2.2.8) et $X_{ét}$ est un site.

THÉORÈME 3.1. — *Soit X un K-espace perfectoïde.*

i) *Si Y est un K-espace adique et $f : Y \to X$ un morphisme étale, alors Y est un perfectoïde.*

ii) *Le couple $X_{ét}$ est un site.*

iii) *Le basculement induit un isomorphisme de sites (fonctoriel en X)*

$$X_{ét} \xrightarrow{\simeq} X^\flat_{ét}.$$

3.2. Indications sur la démonstration

3.2.1. La preuve de Scholze fait de nouveau appel au langage des presque mathématiques. Soit $A = R^a$ une K^{0a}-algèbre. On dit qu'un A-module $M = N^a$ est *presque de type fini* (resp. *presque de présentation finie*) si, pour tout $\lambda \in \mathfrak{m}$, il existe une application R-linéaire $f_\lambda : N_\lambda \to N$, avec N_λ de type fini (resp. de présentation finie), tels que $\ker f_\lambda$ et coker f_λ sont annulés par λ. On dit que M est *uniformément presque de type fini* si l'on peut borner le nombre de générateurs des N_λ indépendamment de λ.

On dit que le A-module M est *uniformément fini projectif* s'il est plat et uniformément presque de type fini (auquel cas il est presque projectif). Le rang d'un tel module est alors bien défini ([Sc1], th. 4.11, [GR], prop. 4.3.27).

Soient $f : A \to B$ un morphisme de K^{0a}-algèbres et $\mu : (B \otimes_A B)_* \to B_*$ le morphisme induit par la multiplication. On dit que f est *non ramifié* s'il existe $e \in (B \otimes_A B)_*$ tel que $e^2 = e$, $\mu(e) = 1$ et $xe = 0$ pour tout $x \in \ker \mu$. On dit que f est *étale* si f est plat et non ramifié. On dit que f est *fini étale* si f est étale et si B est un A-module presque de présentation finie.

En utilisant l'étude faite par Gabber et Ramero du Frobenius dans les morphismes presque étales ([GR], §3.5), Scholze montre ([Sc1], prop. 5.22, 5.23 et th. 5.25) :

1. Si $\overline{f} : \overline{A} \to \overline{B}$ est un morphisme fini étale de K^{0a}/ϖ-algèbres et si $\overline{A}$ est perfectoïde, $\overline{B}$ l'est aussi.
2. Si $g : R \to S$ est un morphisme fini étale de $K^\flat$-algèbres de Banach et si R est perfectoïde, S l'est aussi, $R^{0a} \to S^{0a}$ est fini étale et S^{0a} est un R^{0a}-module uniformément fini projectif.
3. Si $f : A \to B$ est un morphisme de K-algèbres perfectoïdes, alors $f^\flat$ est fini étale si et seulement si f et $A^{0a} \to B^{0a}$ le sont. Si c'est le cas, B^{0a} est un A^{0a}-module uniformément fini projectif. Le foncteur de basculement respecte le degré.

Attention que, pour le moment, lorsque K est de caractéristique 0, si A est une K-algèbre perfectoïde et $f : A \to B$ un morphisme fini étale, on ne sait pas que la K-algèbre de Banach B est un perfectoïde.

3.2.2. On peut alors montrer que $X^\flat_{ét}$ est bien un site :

– On vérifie facilement que, si $X \to Y$ et $Z \to Y$ sont des morphismes de $K^\flat$-espaces perfectoïdes avec $X \to Y$ (fini) étale, alors $X \times_Y Z \to Z$ est (fini) étale et l'application induite sur les espaces topologiques $|X \times_Y Z| \to |X| \times_{|Y|} |Z|$ est surjective (lorsque $X = \mathrm{Spa}(A, A^+)$, $Y = \mathrm{Spa}(B, B^+)$, avec $(A, A^+) \to (B, B^+)$ fini étale, et $Z = \mathrm{Spa}(C, C^+)$, on a $X \times_Y Z = \mathrm{Spa}(D, D^+)$ avec $D = A \otimes_B C$ et D^+ est la fermeture intégrale de C^+ dans D).

– Par réduction au cas des affinoïdes p-finis, on montre que, si $f : X \to Y$ est un morphisme étale de $K^\flat$-espaces perfectoïdes, alors

i) si f est fini, pour tout ouvert affinoïde V de Y, $U = f^{-1}(V)$ est un affinoïde perfectoïde et $(\mathcal{O}_Y(V), \mathcal{O}_Y^+(V)) \to (\mathcal{O}_X(U), \mathcal{O}_X^+(U))$ est fini étale.

ii) pour tout $x \in X$, il existe des ouverts affinoïdes U de X et V de Y tels que $x \in U$, $f(U) \subset V$ et que $U \to V$ se déduise par changement de base d'un morphisme étale de K-espaces adiques noethériens,

iii) l'application f est ouverte,

iv) le composé de deux morphismes (finis) étales de $K^\flat$-espaces perfectoïdes est (fini) étale.

3.2.3. L'étape suivante est la preuve du théorème lorsque $X = \mathrm{Spa}(K, K^0)$ avec K un corps perfectoïde :

Théorème 3.2 ([Sc1], th. 3.7). — *Soit K un corps perfectoïde. Toute extension finie L de K est un corps perfectoïde et $[L^\flat : K^\flat] = [L : K]$. Le basculement induit une équivalence de catégories entre K-algèbres étales et $K^\flat$-algèbres étales.*

Ce théorème [13] peut se montrer directement ([FF1], cf. aussi [KL]) par dévissage en utilisant le fait que, si L/K est galoisienne de groupe de Galois un groupe simple, alors ou bien L/K est non ramifiée (i.e. le degré de l'extension est égal au degré résiduel) ou bien L/K est cyclique ainsi qu'un petit peu de cohomologie galoisienne. Scholze le déduit de l'assertion (3) du §3.2.1 et du fait que, si C est un corps perfectoïde algébriquement clos contenant $K^\flat$ comme sous-corps fermé, alors $C^\sharp_K$ est un corps perfectoïde algébriquement clos contenant K.

3.2.4. Le théorème se déduit alors facilement du résultat suivant :

Proposition 3.3 ([Sc1], th. 7.9,(iii)). — *Soient A une K-algèbre perfectoïde et B une A-algèbre finie étale. Alors B est une K-algèbre perfectoïde, les morphismes $A^\flat \to B^\flat$ et $A^{0a} \to B^{0a}$ sont finis étales et B^{0a} est un A^{0a}-module uniformément fini projectif.*

On se ramène facilement à montrer que, pour tout $x \in \mathrm{Spa}(A, A^0)$, il existe un voisinage ouvert affinoïde U de x et un recouvrement fini étale $V \to U$ tel que $V^\flat \to U^\flat$ est fini étale. On remarque alors que le complété $\widehat{k(x)}$ du corps résiduel en x pour la topologie ϖ-adique est un corps perfectoïde. On vérifie alors que la catégorie $\widehat{k(x)}_{\text{fét}}$ des $\widehat{k(x)}$-algèbres finies étales est équivalente à $2\text{–}\lim_{U \ni x} \mathcal{O}_X(U)_{\text{fét}}$, limite inductive des catégories des $\mathcal{O}_X(U)$-algèbres finies étales, pour U parcourant les voisinages ouverts affinoïdes de x. Grâce à l'équivalence entre $\widehat{k(x)}_{\text{fét}}$ et $\widehat{k(x^\flat)}_{\text{fét}}$ fournie par le théorème précédent, on obtient une équivalence

$$2\text{–}\lim_{U \ni x} \mathcal{O}_X(U)_{\text{fét}} \xrightarrow{\sim} 2\text{–}\lim_{U \ni x} \mathcal{O}_{X^\flat}(U^\flat)_{\text{fét}}$$

et le résultat s'en déduit.

Remarque 3.4. — Le théorème de (presque) pureté de Faltings ([Fa1], th. 3.1 et [Fa2], §2.b, th. 4) est essentiellement un cas particulier du fait que, avec les hypothèses de la proposition ci-dessus, B^{0a} est une A^{0a}-algèbre finie étale.

13. Bien connu depuis longtemps dans de nombreux cas particuliers et abondamment utilisé en théorie de Hodge p-adique.

4. ESPACES ADIQUES ET PERFECTOÏDES TORIQUES

4.1. Généralités

Rappelons brièvement la classification des variétés toriques (cf., par exemple, [Fu]) : Fixons un groupe abélien libre de rang fini Λ et soit $\Lambda^\vee$ son dual. Posons $\Lambda_\mathbb{R} = \mathbb{R} \otimes_\mathbb{Z} \Lambda$ et $\Lambda^*_\mathbb{R} = \mathbb{R} \otimes_\mathbb{Z} \Lambda^\vee$. Dans ce texte, un *cône* est un cône polyhédral rationnel strictement convexe $\subset \Lambda_\mathbb{R}$, i.e. c'est un sous-ensemble $\sigma \subset \Lambda_R$ ne contenant pas de sous-espace vectoriel non nul tel qu'il existe $v_1, v_2, \ldots, v_m \in \Lambda$ avec

$$\sigma = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i \mid \lambda_i \in \mathbb{R}, \lambda_i \geq 0 \right\} \quad \text{(on dit que les } v_i \text{ } \textit{engendrent } \sigma\text{)}.$$

On note alors S_σ le monoïde $\sigma^\vee \cap \Lambda^\vee = \{u \in \Lambda^\vee \mid < u, v > \geq 0, \forall v \in \sigma\}$. Si $\tau \subset \sigma$, on dit que τ est une *face de* σ s'il existe $u \in S_\sigma$ tel que $\tau = \sigma \cap u^\perp = \{v \in \sigma \mid < u, v >= 0\}$. Si $v_1, v_2, \ldots, v_m$ engendrent σ et si $I_\tau = \{i \mid < u, v_i >= 0\}$, alors τ est le cône engendré par les v_i avec $i \in I_\tau$. En particulier toute face est un cône et un cône n'a qu'un nombre fini de faces.

Un *éventail* Σ est un sous-ensemble fini de l'ensemble des cônes tel que

i) si $\sigma \in \Sigma$, toute face de σ aussi,

ii) si $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma$, alors $\sigma_1 \cap \sigma_2$ est une face de σ_1.

Pour tout corps k, on note T_k le tore défini sur k dont le groupe des caractères est $\Lambda^\vee$. Une *variété torique* sur k de tore T_k est un schéma normal séparé de type fini sur k contenant T_k comme sous-schéma ouvert dense et muni d'une action de T_k qui prolonge son action sur lui-même par translation. Pour tout cône σ, le tore T_k opère de façon évidente sur le k-schéma $U_{\sigma,k} = \operatorname{Spec} k[S_\sigma]$. Les axiomes des éventails sont faits pour pouvoir recoller les $U_{\sigma,k}$ pour σ appartenant à un éventail donné Σ pour obtenir une variété torique $X_{\Sigma,k}$ sur k (tout éventail contient la face $\{0\}$ et $T_k = U_{\{0\},k}$). Pour toute variété torique X sur k de tore T_k, il existe un unique éventail Σ tel que $X \simeq X_{\Sigma,k}$.

On dit qu'un éventail Σ est *lisse* (resp. *propre, projectif*) si $X_{\Sigma,k}$ l'est (cela ne dépend pas du corps k). Enfin, si k' est une extension de k, alors $X_{\Sigma,k'}$ est la variété déduite de $X_{\Sigma,k}$ par changement de base.

On voit que ces constructions se transposent au monde adique : si k est un corps complet non archimédien, on associe à tout éventail Σ le k-espace adique $\mathcal{X}^{\mathrm{ad}}_K$ obtenu en recollant les affinoïdes $\mathcal{U}^{\mathrm{ad}}_{\sigma,k} = \operatorname{Spa}(k{<}S_\sigma{>}, k^0{<}S_\sigma{>})$ pour $\sigma \in \Sigma$. Lorsque Σ est propre, $\mathcal{X}^{\mathrm{ad}}_\Sigma$ s'identifie au k-espace adique $X^{\mathrm{ad}}_{\Sigma,k}$ associé à $X_{\Sigma,k}$.

Ces constructions se transposent aussi au monde perfectoïde : Si σ est un cône, posons $S^{\mathrm{perf}}_\sigma = S_\sigma[1/p] = \{u \in \Lambda^\vee[1/p] \mid < u, v > \geq 0, \forall v \in \sigma\}$. Si K est un corps perfectoïde, on associe à tout éventail Σ le K-espace perfectoïde $\mathcal{X}^{\mathrm{perf}}_{\Sigma,K}$ obtenu en recollant les affinoïdes perfectoïdes $\mathcal{U}^{\mathrm{perf}}_{\sigma,K} = \operatorname{Spa}(K{<}S^{\mathrm{perf}}_\sigma{>}, K^0{<}S^{\mathrm{perf}}_\sigma{>})$ pour $\sigma \in \Sigma$.

Il est facile de voir que $(\mathcal{X}_{\Sigma,K})^\flat$ s'identifie à $\mathcal{X}_{\Sigma,K^\flat}$ et que l'on a un isomorphisme

$$\mathcal{X}^{\mathrm{perf}}_{\Sigma,K} \xrightarrow{\sim} \varprojlim \{\mathcal{X}^{\mathrm{ad}}_{\Sigma,K} \underset{\varphi}{\leftarrow} \mathcal{X}^{\mathrm{ad}}_{\Sigma,K} \underset{\varphi}{\leftarrow} \dots\}$$

où φ est l'endomorphisme de $\mathcal{X}^{\mathrm{ad}}_{\Sigma,K}$ induit par la multiplication par p sur les S_σ. On a aussi un homéomorphisme d'espaces topologiques

$$|\mathcal{X}^{\mathrm{perf}}_{\Sigma,K}| \xrightarrow{\sim} \varprojlim \{|\mathcal{X}^{\mathrm{ad}}_{\Sigma,K}| \underset{\varphi}{\leftarrow} |\mathcal{X}^{\mathrm{ad}}_{\Sigma,K}| \underset{\varphi}{\leftarrow} \dots\}$$

et un isomorphisme de topoi

$$(\mathcal{X}^{\mathrm{perf}}_{\Sigma,K})^\sim_{ét} \xrightarrow{\sim} \varprojlim \{(\mathcal{X}^{\mathrm{ad}}_{\Sigma,K})^\sim_{ét} \underset{\varphi}{\leftarrow} (\mathcal{X}^{\mathrm{ad}}_{\Sigma,K})^\sim_{ét} \underset{\varphi}{\leftarrow} \dots\}$$

En caractéristique p, l'endomorphisme φ de $\mathcal{X}^{\mathrm{ad}}_{\Sigma,K^\flat}$ est radiciel. Il en résulte que les applications induites aussi bien sur les espaces topologiques que sur le site étale sont des isomorphismes. On peut passer à la limite et on obtient des isomorphismes

$$|\mathcal{X}^{\mathrm{perf}}_{\Sigma,K^\flat}| \xrightarrow{\sim} |\mathcal{X}^{\mathrm{ad}}_{\Sigma,K^\flat}| \quad \text{et} \quad (\mathcal{X}^{\mathrm{perf}}_{\Sigma,K^\flat})^\sim_{ét} \xrightarrow{\sim} (\mathcal{X}^{\mathrm{ad}}_{\Sigma,K^\flat})^\sim_{ét},$$

d'où, in fine, à cause des isomorphismes

$$|\mathcal{X}^{\mathrm{perf}}_{\Sigma,K^\flat}| \xrightarrow{\sim} |\mathcal{X}^{\mathrm{perf}}_{\Sigma,K}| \quad \text{et} \quad (\mathcal{X}^{\mathrm{perf}}_{\Sigma,K^\flat})^\sim_{ét} \xrightarrow{\sim} (\mathcal{X}^{\mathrm{perf}}_{\Sigma,K})^\sim_{ét},$$

des « projections »

$$\pi : |\mathcal{X}^{\mathrm{ad}}_{\Sigma,K^\flat}| \to |\mathcal{X}^{\mathrm{ad}}_{\Sigma,K}| \quad \text{et} \quad \pi_{ét} : (\mathcal{X}^{\mathrm{ad}}_{\Sigma,K^\flat})^\sim_{ét} \to (\mathcal{X}^{\mathrm{ad}}_{\Sigma,K})^\sim_{ét},$$

où il n'y a plus d'espaces perfectoïdes, seulement des espaces adiques définis sur des corps perfectoïdes !

4.2. Un résultat d'approximation

PROPOSITION 4.1 ([Sc1], prop. 8.7). — *Soient Σ un éventail propre et lisse, $Y \subset X_{\Sigma,K}$ une hypersurface, $\widetilde{Y}$ un voisinage ouvert de Y^{ad} dans $\mathcal{X}^{\mathrm{ad}}_{\Sigma,K}$, F un sous-corps dense de $K^\flat$ et π comme ci-dessus. Il existe une hypersurface $Z \subset X_{\Sigma,K^\flat}$ définie sur F telle que $Z^{\mathrm{ad}} \subset \pi^{-1}(\widetilde{Y})$.*

Posons $\quad X = X_{\Sigma,K}$, $\mathcal{X}^{\mathrm{ad}} = \mathcal{X}^{\mathrm{ad}}_{\Sigma,K}$, $\mathcal{X}^{\mathrm{perf}} = \mathcal{X}^{\mathrm{perf}}_{\Sigma,K}$

et (abusivement) $\quad X_\flat = X_{\Sigma,K^\flat}$, $\mathcal{X}^{\mathrm{ad}}_\flat = \mathcal{X}^{\mathrm{ad}}_{\Sigma,K^\flat}$, $\mathcal{X}^{\mathrm{perf}}_\flat = \mathcal{X}^{\mathrm{perf}}_{\Sigma,K^\flat} = (\mathcal{X}^{\mathrm{perf}})^\flat$.

Tout diviseur de Weil de X est linéairement équivalent à un *T-diviseur de Weil*, c'est-à-dire un diviseur de Weil stable sous l'action du tore T_K ([Fu], §3.4). Choisissons un T-diviseur de Weil D et une section globale $f \in H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$ tels que Y soit le lieu des zéros de f.

Les voisinages tubulaires de Y^{ad}

$$\widetilde{Y}_\varpi = \{x \in \mathcal{X} \mid |f(x)| \le |\varpi^{(0)}(x)|\},$$

pour ϖ parcourant les pseudo-uniformisantes de $K^\flat$, forment un système fondamental de voisinages ouverts de Y^{ad} et, quitte à rétrécir $\widetilde{Y}$ et à bien choisir ϖ, on peut supposer que $\widetilde{Y} = \widetilde{Y}_\varpi$. L'image inverse de $\widetilde{Y}$ dans $\mathcal{X}^{\mathrm{perf}}$ est $\widetilde{Y}^{\mathrm{perf}} = \{x \in \mathcal{X}^{\mathrm{perf}} \mid |f(x)| \le |\varpi^{(0)}(x)|\}$.

Soient $(\tau_r = \mathbb{R}_{\geq 0} v_r)_{1 \leq r \leq s}$ (avec les $v_r \in \Lambda$) les cônes de dimension 1 appartenant à Σ. Pour tout r, $U_{\tau_r,K} \simeq \mathbb{A}^1_k \times \mathbb{G}^{d-1}_{m,K}$ et on note $D_{r,K}$ le diviseur de Weil de $X_{\Sigma,K}$ adhérence de Zariski de $\{0\} \times \mathbb{G}^{d-1}_{m,K}$. Il est invariant sous T_K. Les T-diviseurs de Weil sont les éléments du groupe abélien libre de base les $D_{r,K}$ ([Fu], §3.3) et, si $D = \sum_{r=1}^{s} n_r D_{r,K}$, on a (*loc. cit.*, §3.5)

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(D)) = \bigoplus_{u \in \Lambda^\vee, < u, v_r > \geq -n_r} K\chi^u$$

(où χ^u est u vu comme fonction rationnelle sur X). On en déduit facilement que, si $\mathcal{O}_{\mathcal{X}^{\mathrm{perf}}}(D)$ désigne le $\mathcal{O}_{\mathcal{X}^{\mathrm{perf}}}$-module image inverse de $\mathcal{O}_X(D)$, alors

$$H^0(\mathcal{X}^{\mathrm{perf}}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}^{\mathrm{perf}}}(D)) = \widehat{\bigoplus}_{u \in \Lambda^\vee[1/p], < u, v_r > \geq -n_r} K\chi^u$$

(K-espace de Banach de base des χ^u). Si l'on considère le T-diviseur de Weil $D_\flat = \sum_{r=1}^{s} n_r D_{r,K^\flat}$ de $X_\flat$, on a aussi

$$H^0(X_\flat, \mathcal{O}_{X_\flat}(D_\flat)) = \bigoplus_{\substack{u \in \Lambda^\vee \\ \langle u, v_r \rangle \geq -n_r}} K^\flat \chi^u \quad \text{et} \quad H^0(\mathcal{X}_\flat^{\mathrm{perf}}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}_\flat^{\mathrm{perf}}}(D_\flat)) = \widehat{\bigoplus_{\substack{u \in \Lambda^\vee[1/p] \\ \langle u, v_r \rangle \geq -n_r}}} K^\flat \chi^u.$$

Considérons la K-algèbre perfectoïde R complétion (pour la topologie évidente) de la K-algèbre graduée $\oplus_{d \in \mathbb{N}[1/p]} H^0(\mathcal{X}^{\mathrm{perf}}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}^{\mathrm{perf}}})$. Le lemme 2.2 s'étend à R et permet de montrer l'existence de $g \in H^0(\mathcal{X}_\flat^{\mathrm{perf}}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}_\flat^{\mathrm{perf}}}(D_\flat))$ tel que $g^{(0)}$ est suffisamment proche de f pour que l'image inverse de $\widetilde{Y}^{\mathrm{perf}}$ dans $\mathcal{X}_\flat^{\mathrm{perf}}$ soit

$$\widetilde{Y}_\flat^{\mathrm{perf}} = \{x \in \mathcal{X}_\flat^{\mathrm{perf}} \mid |g(x)| \leq |\varpi(x)|\}.$$

Quitte à remplacer g par un élément qui lui est suffisamment proche, on peut supposer que g est une combinaison linéaire finie des χ^u à coefficients dans F. Il existe alors $N \in \mathbb{N}$ tel que $h = g^{p^N}$ soit une section globale de $\mathcal{O}_{X_\flat}(p^N D_\flat)$. Le lieu des zéros Z de h est défini sur F et on a bien $Z^{\mathrm{ad}} \subset \pi^{-1}(\widetilde{Y})$.

5. LA CONJECTURE MONODROMIE-POIDS

5.1. Cohomologie étale et représentations ℓ-adiques

Pour tout corps E, on note $G_E = \mathrm{Gal}(\overline{E}/E)$ le groupe de Galois absolu. Si X est une variété propre et lisse sur E et si $X_{\overline{E}}$ est la variété sur $\overline{E}$ déduite de X par changement de base, pour tout $i \in \mathbb{N}$,

$$H^i_{\acute{e}t}(X_{\overline{E}}, \mathbb{Q}_\ell) = \mathbb{Q}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \left(\varprojlim_{m \in \mathbb{N}} H^i_{\acute{e}t}(X_{\overline{E}}, \mathbb{Z}/\ell^m\mathbb{Z}) \right)$$

est une *représentation ℓ-adique de G_E*, i.e. une paire $V = (V, \rho)$ formée d'un $\mathbb{Q}_\ell$-espace vectoriel V de dimension finie et d'un homomorphisme continu $\rho : G_E \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}_\ell}(V)$.

Rappelons que lorsque $\mathbb{F}$ est un corps fini ayant q éléments, si ℓ est premier à q une représentation ℓ-adique de $G_{\mathbb{F}}$ est dite *pure de poids* $i (\in \mathbb{Z})$ si, étant donné un plongement de $\mathbb{Q}_\ell$ dans $\mathbb{C}$, toutes les racines dans $\mathbb{C}$ du polynôme caractéristique du Frobenius géométrique (agissant sur $\overline{\mathbb{F}}$ par $x \mapsto x^{q^{-1}}$) sont des nombres algébriques de valeur absolue égale à $q^{i/2}$. Par exemple on sait, grâce aux conjectures de Weil démontrées par Deligne, que, si X est une variété propre et lisse sur $\mathbb{F}$, alors $H^i_{ét}(X_{\overline{\mathbb{F}}}, \mathbb{Q}_\ell)$ est pure de poids i.

Soit k un corps localement compact non archimédien dont le corps résiduel $\mathbb{F}$ est de caractéristique p. Le corps résiduel $\overline{\mathbb{F}}$ de $\overline{k}$ est une clôture algébrique du corps fini $\mathbb{F}$ et on a $G_{\mathbb{F}} = G_k/I_k$ où I_k est le groupe d'inertie. Fixons un nombre premier $\ell \neq p$ et notons $\chi_\ell : G_k \to \mathbb{Z}_\ell^*$ le caractère cyclotomique. Choisissons une suite $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\overline{k}$ tels que π_0 est une uniformisante de k et $\pi_{n+1}^\ell = \pi_n$ pour tout n. Si, pour $g \in G_k$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $g(\pi_n) = c_n(g)\pi_n$, les applications $c_n : G_k \to \mu_{\ell^n}(\overline{k})$ sont des 1-cocycles qui induisent par passage à la limite un 1-cocycle continu $c : G_k \to \mathbb{Z}_\ell(1)$.

Soit (V, ρ) une représentation ℓ-adique de G_k. Le théorème de monodromie ℓ-adique de Grothendieck (cf. par exemple [Il2], th.1.4) implique qu'il existe une unique application $\mathbb{Q}_\ell$-linéaire G_k-équivariante $N : V \to V(-1)$ telle que l'action de I_k se factorise à travers un quotient fini sur la représentation (V, ρ_N), où $\rho_N = \rho \circ \exp(-\chi_\ell^{-1}Nc))$. (Si l'on choisit un générateur t_ℓ de $\mathbb{Z}_\ell(1)$, alors $N(v) = N_0(v) \otimes t_\ell^{-1}$, avec N_0 un endomorphisme nilpotent de V, et, pour tout $g \in G_k$, on a $c(g) = u(g)t_\ell$, avec $u(g) \in \mathbb{Z}_\ell$. Alors $\rho_0(g) = \rho(g) \circ \exp(-\frac{u(g)}{\chi_\ell(g)}N_0)$.)

La *filtration de monodromie sur* V peut être définie en posant, pour tout $r \in \mathbb{Z}$,

$$F_r^N V = \sum_{i=0}^{+\infty} \ker N_0^{r+i+1} \cap \operatorname{im} N_0^i \, .$$

Il existe alors une extension finie k' de k telle que le groupe d'inertie $I_{k'}$ opère trivialement sur chaque quotient $F_r^N V / F_{r-1}^N V$ qui peut donc être considérée comme une représentation ℓ-adique de $G_{\mathbb{F}_{k'}}$ (où $\mathbb{F}_{k'}$ est le corps résiduel de k'). On dit que *la filtration de monodromie de* V *est pure de poids* i si, pour tout $r \in \mathbb{Z}$, $F_r^N V/F_{r-1}^N V$ est pure de poids $i + r$ (indépendant du choix de k').

La conjecture de monodromie-poids de Deligne (cf. par exemple [RZ], p. 41, [Il2], conj. 3.9) peut s'énoncer ainsi [(14)] :

Conjecture 5.1. — *Soient X une variété propre et lisse sur un corps localement compact k non archimédien, ℓ un nombre premier différent de la caractéristique résiduelle de k et $i \in \mathbb{N}$. Alors la filtration de monodromie sur $H^i_{ét}(X_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell)$ est pure de poids i.*

Lorsque k est de caractéristique p, cette conjecture est un théorème qui se déduit [It2] du cas particulier suivant dû à Deligne :

Proposition 5.2 ([De], th. 1.8.4). — *Soient L une extension finie du corps $\mathbb{F}_p(u)$, x une place de L, k le complété de L en x et X une variété propre et lisse sur L. Si*

14. L'analogue de cette conjecture en théorie de Hodge a été établi par Deligne (non publié) et, indépendamment, par M. Saito [Sa].

ℓ est un nombre premier différent de p et si $i \in \mathbb{N}$, alors $H^i_{\acute{e}t}(X_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell)$ a sa filtration de monodromie pure de poids i.

5.2. Le cas de caractéristique 0

Jusqu'à présent, lorsque k est de caractéristique 0, très peu de cas de la conjecture étaient connus : c'est le cas si X est une courbe ou une variété abélienne (la conjecture se déduit du théorème de réduction semi-stable, SGA VII 1, exp. IX), si X est une surface ([RZ], Satz 2.13, dans le cas de réduction semi-stable, cas auquel on peut se ramener grâce à de Jong), pour certaines variétés de dimension 3 [It1] et pour les variétés qui admettent une uniformisation p-adique [It3]. Récemment, quelques résultats partiels ont été obtenus pour certaines variétés de Shimura ([Bo], [Ca], [Sh]).

Scholze utilise le dictionnaire entre corps perfectoïdes de caractéristique 0 et de caractéristique p et le lemme d'approximation pour déduire du résultat de Deligne l'énoncé suivant :

THÉORÈME 5.3. — *Soit Y une variété projective lisse géométriquement connexe sur une extension finie k de $\mathbb{Q}_p$. On suppose que Y est une intersection complète (ensembliste) dans une variété torique projective lisse. Alors la conjecture monodromie-poids est vraie pour Y.*

PREUVE : Notons $\mathbb{C}_p$ le complété de $\overline{k} = \overline{\mathbb{Q}}_p$ (c'est un corps algébriquement clos). L'action de G_k s'étend par continuité à $\mathbb{C}_p$ et par fonctorialité à $\mathbb{C}_p^\flat$. Choisissons $\varpi = (\varpi^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}_p^\flat$ tel que $\varpi^{(0)}$ est une uniformisante de k. Le complété K de l'extension de k engendré par les $\varpi^{(n)}$ est un corps perfectoïde dont la fermeture algébrique $\overline{K}^\flat$ dans $\mathbb{C}_p^\flat$ est un sous-corps dense de $\mathbb{C}_p^\flat$ et $G_{K^\flat}$ opère par continuité sur $\mathbb{C}_p^\flat$, cette action identifiant $G_{K^\flat}$ à $G_K \subset G_k$.

Le corps $K^\flat$ s'identifie au complété de la clôture radicielle du corps local $E = \mathbb{F}_q((\varpi))$. La clôture séparable $\overline{E}$ de E dans $\mathbb{C}_p^\flat$ est un sous-corps dense de $\mathbb{C}_p^\flat$ stable par $G_K = G_{K^\flat}$, groupe qui s'identifie ainsi à G_E.

Par hypothèse, il existe un éventail projectif lisse Σ tel que $Y = Y_1 \cap Y_2 \ldots \cap Y_c$ est une sous-variété de codimension c, intersection de c hypersurfaces de $X_{\Sigma,k}$.

On sait ([Hu2], prop. 2.1.4 et th. 3.8.1) que, si V est une variété algébrique sur un corps non archimédien algébriquement clos de caractéristique $\neq \ell$, la cohomologie étale ℓ-adique de V s'identifie à celle de l'espace adique associé V^{ad}.

D'après un théorème de Huber ([Hu3],th.3.6), il existe un voisinage ouvert $\widetilde{Y}$ de Y_K^{ad} dans $X_{\Sigma,K}^{\mathrm{ad}}$ tel que $Y_{\mathbb{C}_p}^{\mathrm{ad}}$ et $\widetilde{Y}_{\mathbb{C}_p}$ ont la même cohomologie étale ℓ-adique.

Soit $L = \mathbb{F}_q(\varpi)$. La fermeture séparable $\overline{L}$ de L dans $\mathbb{C}_p^\flat$ est dense dans $\mathbb{C}_p^\flat$. On déduit facilement du résultat d'approximation (prop. 4.1) que, si π est comme dans cette proposition, on peut trouver une sous-variété fermée Z de $X_{\Sigma,K^\flat}$ de codimension c, définie sur $\overline{L}$ donc sur une extension finie L' de L, telle que $Z^{\mathrm{ad}} \subset \pi^{-1}(\widetilde{Y})$. Soit $Z' \to Z$ une altération projective lisse ([dJ], th. 4.1) qu'on peut supposer, quitte à remplacer L' par une extension finie, définie sur L'.

On dispose d'un diagramme commutatif de topoi

$$\begin{tikzcd} (Z'^{\mathrm{ad}}_{\mathbb{C}_p^\flat})^\sim_{ét} \arrow[r] & (\pi^{-1}(\widetilde{Y})_{\mathbb{C}_p^\flat})^\sim_{ét} \arrow[r] \arrow[d] & (X^{\mathrm{ad}}_{\Sigma,\mathbb{C}_p^\flat})^\sim_{ét} \arrow[d, "\simeq"] \\ (Y^{\mathrm{ad}}_{\mathbb{C}_p})^\sim_{ét} \arrow[r] & (\widetilde{Y}_{\mathbb{C}_p})^\sim_{ét} \arrow[r] & (X^{\mathrm{ad}}_{\Sigma,\mathbb{C}_p})^\sim_{ét} \end{tikzcd}$$

d'où, pour tout $i \in \mathbb{N}$, comme $H^i_{ét}(Y_{\mathbb{C}_p}, \mathbb{Q}_\ell) = H^i_{ét}(Y^{\mathrm{ad}}_{\mathbb{C}_p}, \mathbb{Q}_\ell) = H^i_{ét}(\widetilde{Y}_{\mathbb{C}_p}, \mathbb{Q}_\ell)$, un diagramme commutatif de représentations ℓ-adiques de $G_{E'}$ (sous-groupe ouvert de $G_E = G_K \subset G_k$)

$$\begin{tikzcd} H^i_{ét}(X_{\Sigma,\mathbb{C}_p}, \mathbb{Q}_\ell) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & H^i_{ét}(Y_{\mathbb{C}_p}, \mathbb{Q}_\ell) \arrow[d, "f_i"] \\ H^i_{ét}(X_{\Sigma,\mathbb{C}_p^\flat}, \mathbb{Q}_\ell) \arrow[r, "g_i"] & H^i_{ét}(Z'_{\mathbb{C}_p^\flat}, \mathbb{Q}_\ell). \end{tikzcd}$$

Soit d la dimension de Y. Si f_{2d} n'était pas un isomorphisme, elle serait nulle et g_{2d} le serait aussi, ce qui contredit le fait que la première classe de Chern d'un fibré inversible ample sur $X_{\Sigma,\mathbb{C}_p^\flat}$ a une image non nulle. La dualité de Poincaré implique alors que, pour tout i, f_i est un isomorphisme de $H^i_{ét}(Y_{\mathbb{C}_p}, \mathbb{Q}_\ell)$ sur un facteur direct de $H^i_{ét}(Z'_{\mathbb{C}_p^\flat}, \mathbb{Q}_\ell)$. L'adhérence E' de L' dans $\mathbb{C}_p^\flat$ est une extension finie de E et la proposition 5.2 implique que, pour tout i, $H^i_{ét}(Z'_{\mathbb{C}_p}, \mathbb{Q}_\ell) = H^i_{ét}(Z'^{\mathrm{ad}}_{\mathbb{C}_p}, \mathbb{Q}_\ell)$ a sa filtration de monodromie pure de poids i en tant que représentation de $G_{E'}$. Par conséquent, c'est aussi le cas de la filtration de monodromie de $H^i_{ét}(Y_{\mathbb{C}_p}, \mathbb{Q}_\ell)$ en tant que représentation de $G_{E'}$, donc aussi de $G_E = G_K$. Comme K/k est une pro-p-extension totalement ramifiée, la filtration de monodromie ne change pas quand on voit $H^i_{ét}(Y_{\mathbb{C}_p}, \mathbb{Q}_\ell)$ comme représentation de G_k et reste pure de poids i.

RÉFÉRENCES

[Ab] A. ABBES – *Eléments de géométrie rigide I*, Progress in Math. **286**, Birkhäuser, Basel, 2010.

[Be] V. BERKOVICH – *Spectral theory and analytic geometry over non-archimedean fields*, Math. Surveys and Monographs **33**, AMS, Providence, RI, 1990.

[BGR] S. BOSCH, U. GÜNTZER & R. REMMERT – *Non-Archimedean analysis. A systematic approach to rigid analytic geometry.* Grundlehren der Math. Wiss. **261**, Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[Bo] P. BOYER – *Conjecture de monodromie-poids pour quelques variétés de Shimura unitaires*, Compositio Math. **146** (2010), 367–403.

[Ca] A. CARAIANI – *Local-global compatibility and the action of monodromy on nearby cycles*, preprint arXiv :1010.2188.

[dJ] A. DE JONG – *Smoothness, semi-stability and alterations*, Publ. Math. IHÉS, **83** (1996), 51–93.

[De] P. DELIGNE – *La conjecture de Weil. II*, Publ. Math. IHÉS, **52** (1980),137–252.

[Fa1] G. FALTINGS – *p-adic Hodge theory*, J. Amer. Math. Soc. **1** (1988), 255–299.

[Fa2] G. FALTINGS – *Almost étale extensions* **in** Cohomologies p-adiques et applications arithmétiques, II, Astérisque **279** (2002), 185–270.

[FF1] L. FARGUES & J.-M. FONTAINE – *Vector bundles and p-adic Galois representations*, AMS/IP Studies in Advanced Mathematics **51** (2012), 77–113.

[FF2] L. FARGUES & J.-M. FONTAINE – *Courbes et fibrés vectoriels en théorie de Hodge p-adique* (2011), pré-publication (http ://www-irma.u-strasbg.fr/fargues/Courbe.pdf)

[FW] J.-M. FONTAINE & J.-P. WINTENBERGER – *Extensions algébriques et corps des normes des extensions APF des corps locaux*, C. R. Acad. Sci. Paris **288** (1979), A441–A444.

[Fu] W. FULTON – *Introduction to toric varieties*, Annals of Math. Studies **131**, Princeton University Press, Princeton, 1993.

[GR] O. GABBER & L. RAMERO – *Almost ring theory*, Lecture Notes in Math. **1800**, Sringer-Verlag, Berlin, 2003.

[Hu1] R. HUBER – *A generalization of formal schemes and rigid analytic varieties*, Math. Z. **217** (1994), 513–551.

[Hu2] R. HUBER – *Etale cohomology of rigid analytic varieties and adic spaces*, Aspects of Mathematics **E30**, Braunschweig, 1996.

[Hu3] R. HUBER – *A finiteness result for direct image sheaves on the étale site of rigid analytic varieties*, J. Algebraic Geom. **7** (1998), 359–403.

[Il1] L. ILLUSIE – *Complexe cotangent et déformations I*, Lecture Notes in Mathematics **239**, Springer-Verlag, Berlin, 1971.

[Il2] L. ILLUSIE – *Autour du théorème de monodromie locale* **in** Périodes p-adiques, Astérisque **223** (1994), 9–57.

[It1] T. ITO – *Weight-monodromy conjecture for certain threefolds in mixed characteristic*, Internat. Math. Res. Notices **2** (2004), 69–87.

[It2] T. ITO – *Weight-monodromy conjecture over equal characteristic local fields* Amer. J. Math. **127** (2005) 647–658.

[It3] T. ITO – *Weight-monodromy conjectures for p-adically uniformized varieties*, Invent. math. **159** (2005), 607–656.

[KL] K. KEDLAYA & R. LIU – *Relative p-adic Hodge theory, I : Foundations* (2011), preprint (http ://math.mit.edu/ kedlaya/papers/relative-padic-Hodge1.pdf)

[Kr] M. KRASNER – *Approximation des corps valués complets de caractéristique $p > 0$ par ceux de caractéristique* 0, Colloque d'algèbre supérieure, Centre Belge de Recherches Mathématiques, 129–206, Gauthier-Villars, Paris, 1957.

[RZ] M. RAPOPORT & T. ZINK – *Über die lokale Zetafunktion von Shimuravarietäten. Monodromiefiltration und verschwindende Zyklen in ungleicher Charakteristik*, Invent. Math. **68** (1982), 21–101.

[Sa] M. SAITO – *Modules de Hodge polarisables*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **24** (1988), 849–995.

[Sc1] P. SCHOLZE – *Perfectoïd spaces*, preprint (2011) (http ://www.math.uni-bonn.de/people/scholze/PerfectoidSpaces.pdf)

[Sc2] P. SCHOLZE – *p-adic Hodge theory for rigid-analytic varieties*, preprint (2012) (http ://www.math.uni-bonn.de/people/scholze/pAdicHodgeTheory.pdf).

[Sh] S. SHIN – *Galois representations arising from some compact Shimura varieties* Ann. of Math. **173** (2011), 1645–1741.

[Wi] J.-P. WINTENBERGER – *Le corps des normes de certaines extensions infinies de corps locaux; applications*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **4** (1983), 59–89.

Jean–Marc FONTAINE

Université Paris–Sud
Département de Mathématiques
Équipe d'Arithmétique et Géométrie algébrique
Bâtiment 425
F–91405 Orsay Cedex
E-mail : `fontaine@math.u-psud.fr`